

1. Устойчивость и качество регулирования линейных САР.  
2. Нелинейные САР тягового электродвигателя и ЭПС.

1

**Понятие об устойчивости и критериях устойчивости.** В системах автоматического регулирования при переходе из одного состояния в другое под влиянием возмущающих или управляющих воздействий возникают переходные процессы, зависящие от динамических свойств звеньев, входящих в состав САР. Если по окончании этих процессов выходная координата системы регулирования приходит в первоначальное или другое равновесное состояние, то такая система устойчива. Система неустойчива, если выходная координата при тех же условиях удаляется от равновесного значения или начинает совершать колебания со всевозрастающей амплитудой.

Обеспечение устойчивости – первое и обязательное требование к системам автоматического регулирования. Строгие и законченные математические формулировки устойчивости движения впервые были даны русским ученым А. М. Ляпуновым, который показал, что во многих случаях устойчивость может быть исследована по линеаризованным уравнениям движения. В соответствии с основными теоремами Ляпунова об устойчивости по первому приближению можно сформулировать следующие условия устойчивости:

- если все корни характеристического уравнения, описывающего линеаризованную систему, имеют отрицательные вещественные части, то нулевое решение исходной нелинейной системы устойчиво асимптотически независимо от членов высших порядков в разложении нелинейности;
- если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, то исходная система – неустойчива;
- если один или несколько корней характеристического уравнения имеют нулевые вещественные части, то об устойчивости исходной нелинейной системы нельзя судить по линейному приближению;
- если исходная система линейна, то при нулевом корне характеристического уравнения система находится на границе аperiodической устойчивости, а при паре мнимых корней – на границе колебательной устойчивости.

Из курса «Теория автоматического управления» известно, что на комплексной плоскости (рис. 8.1а) устойчивым системам соответствуют «левые» корни, т.е. корни расположенные слева от мнимой оси (отрицательные или с отрицательной вещественной частью).

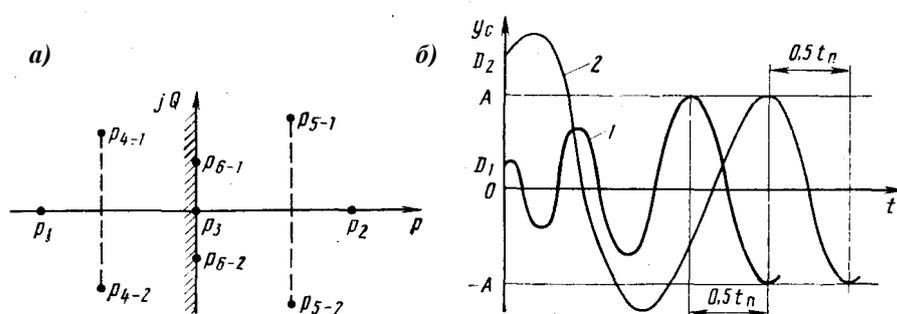


Рис. 8.1

Устойчивость нелинейно-звучающих систем часто зависит от начального отклонения. Система устойчива «в малом», если она устойчива только при бесконечно малых начальных отклонениях.

Устойчивость системы «в большом» соответствует ее устойчивости при больших (конечных по значению) отклонениях.

Система устойчива «в целом», если она устойчива при неограниченных начальных отклонениях.

Отдельные начальные отклонения могут возбуждать в таких системах незатухающие колебания, зависящие только от свойств самой системы – автоколебания. Их характеризуют возможными предельными частотами и амплитудами (предельным циклом). Колебания в такой системе могут быть вызваны, как малыми (кривая 1, рис. 8.1б), так и большими возмущениями (кривая 2). Они всегда стремятся к одной и той же амплитуде  $A$  и частоте  $f=1/t_n$ .

Для исследования устойчивости таких систем с помощью программного обеспечения моделируют их движение при различных начальных условиях, оценивая устойчивость по полученным графикам переходных процессов. При этом необходимо учитывать разброс параметров системы, а также возможный диапазон изменения управляющих и возмущающих воздействий. Задача оценки устойчивости нелинейных систем без интегрирования дифференциальных уравнений решается лишь в ряде частных случаев.

Оценка устойчивости линейных систем, состоящая в отыскании корней характеристического уравнения, трудоемка, если порядок уравнения  $n \geq 3$ . На практике устойчивость оценивают по специальным критериям устойчивости, применение которых не требует определения корней характеристического уравнения. К ним относят алгебраические критерии устойчивости Вышнеградского, Рауса–Гурвица, частотные критерии Михайлова и Найквиста.

Как известно, согласно алгебраическому критерию устойчивости Рауса–Гурвица все корни характеристического уравнения будут иметь отрицательную вещественную часть и система будет устойчива, если все коэффициенты характеристического уравнения положительны:  $A_i > 0$ . Если порядок системы  $n \geq 3$ , то это условие дополняется ограничениями на соотношения коэффициентов.

Условия устойчивости в зависимости от порядка системы приведены ниже.

$$\begin{aligned} n=1 & A_i > 0; \\ n=2 & A_i > 0; \\ n=3 & A_i > 0, A_1 A_2 > A_0 A_3; \\ n=4 & A_i > 0, A_3 (A_1 A_2 - A_0 A_3) > A_1^2 A_4; \\ n=5 & A_i > 0, (A_1 A_2 - A_0 A_3) (A_3 A_4 - A_2 A_5) > (A_1 A_4 - A_0 A_5)^2 \end{aligned}$$

Если работа САР описана системой дифференциальных уравнений, то характеристическое уравнение можно получить, составив определитель из коэффициентов, стоящих перед переменными в левой части системы уравнений, раскрыв его и приравняв к нулю.

**Критерий устойчивости Михайлова.** Советским ученым А. В. Михайловым в 1936...1938 гг. был разработан критерий, позволяющий судить об устойчивости САР по очертаниям кривой Михайлова – годографа вектора  $\Gamma_M(j\omega)$ , соответствующего знаменателю частотной характеристики САР при изменении частоты от 0 до  $\infty$ . Для замкнутой САР в соответствии с выражением (7.25) уравнение кривой Михайлова имеет вид:

$$\Gamma_M(j\omega) = F(j\omega) + E(j\omega) = D(j\omega). \quad (8.1)$$

Для построения годографа вектора  $\Gamma_M(j\omega)$  в уравнении этого вектора выделяют вещественную и мнимую части:

$$\Gamma_M(j\omega) = \text{Re}D(j\omega) + j\text{Im}D(j\omega),$$

Причём

$$\begin{aligned} \text{Re}D(j\omega) &= D_0 - \omega^2 D_2 + \omega^4 D_4 - \dots; \\ \text{Im}D(j\omega) &= \omega D_1 - \omega^3 D_3 + \omega^5 D_5 - \dots \end{aligned}$$

Задавая значения  $\omega$  и вычисляя вещественные и мнимые координаты вектора  $\Gamma_M(j\omega)$ , получают на комплексной плоскости точки, соответствующие его концу. Соединяя полученные точки плавной кривой, получают годограф вектора – кривую Михайлова. Критерий устойчивости Михайлова основан на том, что этот годограф может быть разложен на комплексные сомножители, количество которых равно его порядку  $n$ :

$$\Gamma_M(j\omega) = D_0 \prod_{i=1}^n (j\omega - p_i).$$

Каждый сомножитель этого выражения является комплексным со своей амплитудой и фазой. При этом суммарный угол поворота  $\psi_M$  вектора  $\Gamma_M(j\omega)$  при изменении частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$  будет определяться суммой углов поворота  $\psi_i$  всех векторов – сомножителей  $(j\omega - p_i)$ . Угол поворота каждого такого вектора определяется значением корня. Для «левых» вещественных корней, когда  $p_{li} = -\alpha_{li}$ , фаза вектора определяется выражением:

$$\varphi_{li} = \text{arctg} \frac{\omega}{\alpha_{li}}$$

и при изменении частоты  $0 \leq \omega \leq \infty$  суммарный угол поворота  $\psi_{li} = 0,5\pi$ .

Для правых вещественных корней  $p_{li} = +\alpha_{li}$  фаза вектора:

$$\varphi_{li} = \text{arctg} \frac{\omega}{-\alpha_{li}} \quad \text{и} \quad \psi_{pri} = -0,5\pi.$$

Для пары комплексных сопряженных корней  $p_1 = \pm\alpha + j\beta$  и  $p_2 = \pm\alpha - j\beta$

$$\varphi_{ком} = \text{arctg} \frac{\omega + \beta}{\pm\alpha} + \text{arctg} \frac{\omega - \beta}{\pm\alpha} \quad \text{и} \quad \psi_{ком} = \pm\pi,$$

при этом знак определяется знаком вещественной части корня и для «левых» корней  $\psi_{ком} = +\pi$ , а для «правых» –  $\psi_{ком} = -\pi$ .

Таким образом, при изменении частоты  $0 \leq \omega \leq \infty$  для устойчивой системы, имеющей  $n$  левых корней, суммарный угол поворота вектора  $\Gamma_M(j\omega)$ :

$$\psi_M = 0,5\pi n.$$

Если же система неустойчива и имеет  $m$  правых корней и  $n - m$  левых, то при изменении частоты  $0 \leq \omega \leq \infty$  суммарный угол поворота вектора  $\Gamma_M(j\omega)$ :

$$\psi_M = 0,5 \pi(n-m) \pi - 0,5 \pi m = 0,5 \pi(n-2m) \pi.$$

В связи с изложенным критерий устойчивости Михайлова формулируется следующим образом: для устойчивости линейной системы автоматического регулирования необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова  $\Gamma_M(j\omega)$  при изменении частоты от 0 до  $\infty$ , начавшись на положительной вещественной полуоси и не пересекая начала координат, обошёл последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоскости, повернувшись на угол  $\psi_M = 0,5 \pi n$  против часовой стрелки, и пересёк вещественную и мнимую оси поочередно (здесь  $n$  – порядок полинома  $D(j\omega)$  знаменателя частотной характеристики).

На рис. 8.2 приведены годографы  $\Gamma_M(j\omega)$  для устойчивых и не устойчивых систем. На рис. 8.2б нарушено направление поворота, так как при изменении частоты от  $\omega_1$  до  $\omega_2$  годограф поворачивается по часовой стрелке и суммарный угол его поворота не равен  $0,5 \pi n$ . На рис. 8.2в нарушены очередность пересечения осей и направление поворота годографа при изменении частоты от  $\omega_1$  до  $\infty$ .

Системе автоматического регулирования, находящейся на аperiодической границе устойчивости, соответствует годограф, приведённый на рис. 8.2г и выходящий из начала координат, так как в этом случае один из корней характеристического уравнения САР равен нулю и, следовательно, в уравнении (8.1) свободный член  $D_0=0$ . Если же САР находится на колебательной границе устойчивости, то в составе корней системы имеется пара чисто мнимых  $\pm j\omega$  и годограф  $\Gamma_M(j\omega)$  при  $\omega = 0$  проходит через начало координат (рис 8.2д).

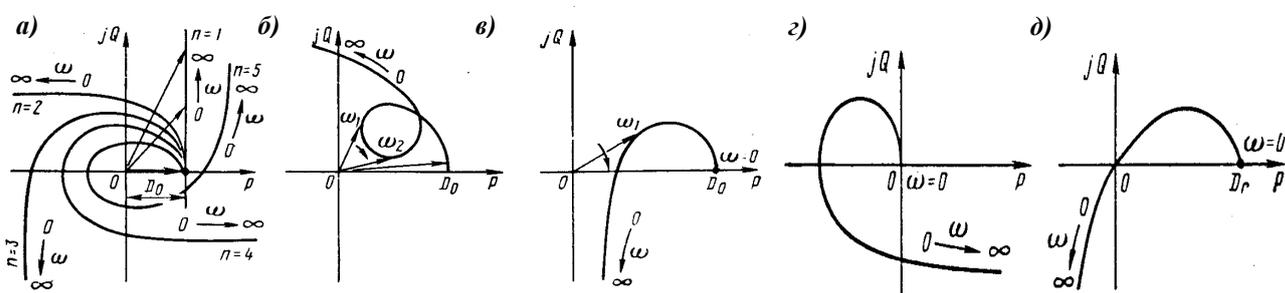


Рис. 8.2

Следует отметить, что при  $\omega=0$   $\Gamma_M(j0) = D(j0) = \text{Re}D(j0) = D_0$ , т. е. годограф начинается на вещественной положительной оси для всех САР, кроме случая, когда система находится на границе аperiодической устойчивости. При  $\omega \rightarrow \infty$  годограф  $\Gamma_M(j\infty) \rightarrow \infty$ , т. е. уходит в бесконечность, причём при чётном  $n$  вдоль вещественной оси, а при нечётном – вдоль мнимой (см. рис. 8.2а).

Критерий Михайлова применяют для исследования сложных многоконтурных систем, когда надо выяснить влияние изменений структуры системы на ее устойчивость.

**Критерий устойчивости Найквиста.** Критерий, предложенный в 1932 г. американским ученым Х. Найквистом, был распространен А. В. Михайловым на системы автоматического управления. Этот критерий позволяет оценивать устойчивость замкнутых САР по виду амплитудно-фазовой характеристики (АФХ) системы в разомкнутом состоянии и тем самым значительно упрощает исследование устойчивости замкнутых систем.

Представив частотную характеристику замкнутой системы в виде (см. формулу 7.25):

$$W_3(p) = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)}$$

получим новое выражение для годографа Михайлова:

$$\Gamma_M^H(j\omega) = 1 + W_p(j\omega). \quad (8.2)$$

Это выражение можно рассматривать как сумму двух векторов (рис. 8.3), а годограф  $\Gamma_M^H(j\omega)$  – как АФХ разомкнутой САР с началом координат, перенесённым в точку с координатами  $(-1; j0)$ .

Из уравнений (8.2) и (7.25) получим

$$\Gamma_M^H(j\omega) = 1 + \frac{E(j\omega)}{F(j\omega)} - \frac{F(j\omega) + E(j\omega)}{F(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{F(j\omega)}. \quad (8.3)$$

Числитель этого выражения представляет собой характеристический полином замкнутой системы, а знаменатель – характеристический полином разомкнутой системы. В диапазоне  $0 \leq \omega \leq \infty$  суммарный угол  $\psi_M^H$  поворота вектора  $\Gamma_M^H(j\omega)$  равен разности углов поворота векторов числителя и знаменателя в выражении (8.3):

$$\psi_M^H = \psi_{\text{числ}} - \psi_{\text{знам}}. \quad (8.4)$$

Для системы, устойчивой в разомкнутом и замкнутом состояниях, их характеристические полиномы  $F(j\omega)$  и  $D(j\omega)$  имеют одинаковый порядок  $n$  и  $\psi_M^H = 0,5\pi - 0,5\pi n = 0$ .

Условие устойчивости на основе равенства (8.4) может быть сформулировано следующим образом: если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы АФХ разомкнутой системы не охватывала точку с координатами  $(-1; j0)$ .

Система, неустойчивая в разомкнутом состоянии, может быть устойчива в замкнутом. В замкнутом состоянии все  $n$  корней – «левые», а в разомкнутом среди них могут быть  $m$  правых корней характеристического уравнения, что соответствует выражению  $\psi_M^H = 0,5\pi n - 0,5\pi(n - 2m) = m\pi$ .

Таким образом, если разомкнутая САР неустойчива, то для устойчивости ее в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы суммарный угол поворота вектора  $\Gamma_M^H(j\omega)$  был равен  $m\pi$ . Другими словами, АФХ разомкнутой САР должна  $0,5m$  раз охватить точку с координатами  $(-1; j0)$ .

Количество охватов АФХ разомкнутой системы точки  $(-1; j0)$ , как и суммарный угол поворота вектора  $\Gamma_M^H(j\omega)$ , определить для сложных систем затруднительно. Поэтому устойчивость оценивают по суммарному количеству пересечений АФХ разомкнутой САР участка отрицательной вещественной полуоси от  $-1$  до  $-\infty$ .

Критерий устойчивости Найквиста имеет следующую формулировку: если разомкнутая система неустойчива и её характеристическое уравнение имеет  $m$  правых корней, то для устойчивости такой системы в замкнутом состоянии суммарное количество  $|q|$  пересечений АФХ разомкнутой системы участка отрицательной вещественной полуоси от  $-1$  до  $-\infty$  должно быть равно  $0,5m$ . При этом переход из верхней полуплоскости в нижнюю считают положительным, а в обратном направлении отрицательным; если годограф начинается на вещественной оси, то эту точку принимают за половину положительного или отрицательного перехода (рис. 8.4).

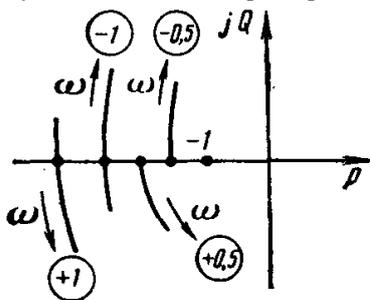


Рис. 8.4

устойчива, и имеет  $m = 2q = 2$  «правых» корней.

В общем случае, применяя критерий Найквиста, необходимо предварительно определить количество «правых» корней полинома  $F(p)$ . Для одноконтурной системы, когда знаменатель  $W_p(p)$  представляет собой произведение знаменателей передаточных функций  $N_i(p)$  отдельных звеньев [уравнение (7.22)], это число найти просто, поскольку корнями  $F(p)$  являются корни полиномов  $N_i(p)$ . У многоконтурных систем, особенно с перекрестными связями, задача определения корней усложняется и в таких случаях целесообразно отказаться от применения критерия Найквиста.

Если  $F(p)$  – полином знаменателя передаточной функции разомкнутой САР имеет один нулевой корень, то годограф  $W_p(j\omega)$  при  $\omega \rightarrow 0$  обращается в бесконечность (рис. 8.6). В этом случае, чтобы сохранить формулировку критерия справедливой для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, годограф  $W_p(j\omega)$  дополняют дугой бесконечно большого радиуса, которую проводят против часовой стрелки к положительной вещественной полуоси на угол  $0,5\pi$ . При нескольких нулевых корнях, т. е. при более высоком порядке астатизма системы, угол дополнения АФХ дугой составляет  $0,5\pi\nu$ , где  $\nu$  – количество нулевых корней полинома  $F(p)$ .

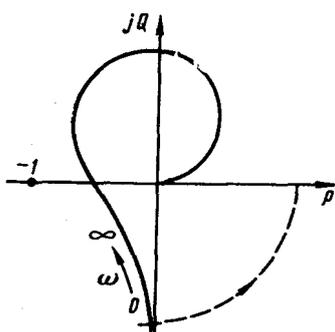


Рис. 8.6

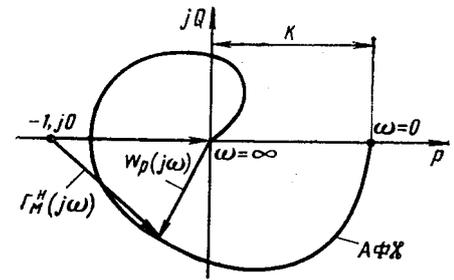


Рис. 8.3

Для примера на рис. 8.5 приведена АФХ разомкнутой САР, имеющей суммарное число переходов  $|q| = |-1 -1 +1| = 1$ . Такая система устойчива в замкнутом состоянии, если разомкнутая САР не

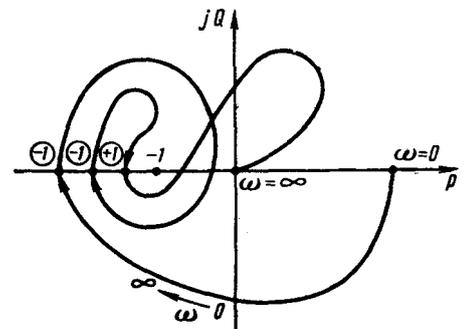


Рис. 8.5

Широкое распространение критерий Найквиста получил при оценке устойчивости САР по логарифмическим частотным характеристикам (рис. 8.7). При этом точкам пересечения АФХ разомкнутой САР с участком отрицательной вещественной полуоси от  $-1$  до  $-\infty$  (см. рис. 8.4 и 8.5) соответствуют точки, для которых  $L_p(\omega) = 20 \lg A_p(\omega) > 0$  и  $\varphi_p(\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi \dots$

Сохраняя правило знаков (см. рис. 8.4) при определении количества переходов прежним, приведём формулировку критерия Найквиста для оценки устойчивости по ЛЧХ. Замкнутая САР устойчива, если суммарное число переходов  $|q|$  фазовой частотной характеристики  $\varphi_p(\omega)$  через прямые  $-\pi, -3\pi, -5\pi \dots$  в области частот, соответствующей  $L_p(\omega) > 0$ , равно  $0,5m$ .

На рис. 8.7а и б приведены графики ЛЧХ разомкнутых САР, причём рис. 8.7а соответствует устойчивой замкнутой системе, если разомкнутая САР устойчива ( $m = 0$ ), а рис. 8.7б – устойчивой замкнутой САР, когда разомкнутая система неустойчива ( $m = 2$ ). Если фазовая частотная характеристика устойчивой разомкнутой САР в диапазоне частоты  $0 \leq \omega \leq \infty$  один раз достигает значения  $-\pi$  (рис. 8.7в), то формулировка критерия упрощается: замкнутая САР устойчива, если ФЧХ достигает значения  $-\pi$  при отрицательных значениях ЛАЧХ.

На рис. 8.7в показаны ЛАЧХ  $L_{p1}(\omega)$  и  $L_{p2}(\omega)$  двух разомкнутых систем, фазовые частотные характеристики  $\varphi_p(\omega)$  у которых одинаковы. При этом система с характеристикой  $L_{p1}(\omega)$  будет устойчива в замкнутом состоянии, а с характеристикой  $L_{p2}(\omega)$  – неустойчива. Критерий устойчивости Найквиста нашел широкое применение при исследовании систем регулирования, состоящих из типовых динамических звеньев, а также при исследовании сложных систем. Его целесообразно применять и тогда, когда часть или все

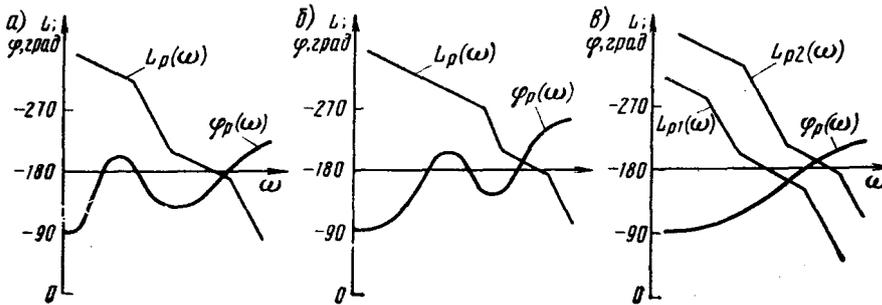


Рис. 8.7

характеристики от дельных элементов системы найдены экспериментально. Он применим при анализе систем, описываемых аналитическими функциями, от личными от дробно-рациональных, например, иррациональными, показательными, трансцендентными и др. Им также удобно пользоваться при анализе систем с запаздыванием.

Многие системы автоматического регулирования можно представить в виде комбинаций типовых динамических звеньев с передаточными функциями  $W_i(p)$ . В простейшем случае, если эти звенья включены последовательно (рис. 8.8), передаточная функция  $W_p(p)$  разомкнутой системы регулирования определяется произведением передаточных функций отдельных звеньев. Как было показано ранее, к такой структурной схеме сводятся и линеаризованные системы автоматического

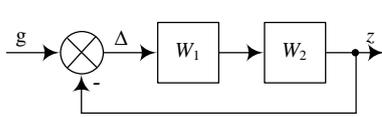


Рис. 8.8

регулирования ЭПС. Рассмотрим устойчивость некоторых характерных систем, состоящих из последовательно соединенных типовых динамических звеньев (интегрирующих, аperiodических и колебательных). Разомкнутая САР из одного аperiodического звена 1-го порядка имеет передаточную функцию

$$W_{p1}(p) = \frac{K}{1 + Tp}$$

В разомкнутом состоянии САР всегда устойчива, так как  $T > 0$  и полином знаменателя имеет один «левый» корень. Её амплитудно фазовая характеристика (см. рис. 8.9) не охватывает точку с координатами  $(-1, j0)$ ; система устойчива и в замкнутом состоянии.

Разомкнутая САР из двух аperiodических звеньев 1-го порядка имеет передаточную функцию

$$W_{p2}(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где  $K = K_1 K_2$  – коэффициент усиления системы, выражаемый через коэффициенты усиления  $K_1$  и  $K_2$  звеньев;  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени звеньев.

Разомкнутая САР устойчива, так как  $T_i > 0$  и полином знаменателя  $F(p)$  передаточной функции  $W_{p2}(p)$  имеет два «левых» корня. Ее АФХ (см. рис.

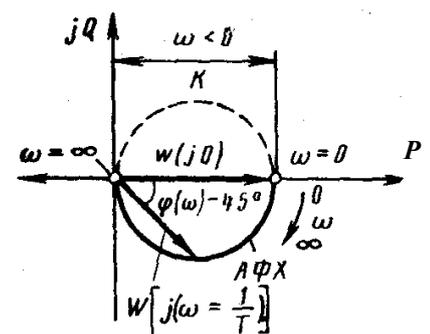


Рис. 8.9

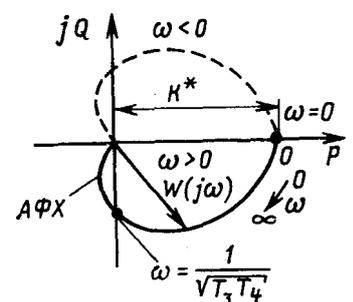


Рис. 8.10

8.10) не охватывает точку с координатами  $(-1, j0)$ ; система и в замкнутом состоянии всегда устойчива.

**Разомкнутая САР из трёх аperiodических звеньев 1-го порядка** имеет передаточную функцию

$$W_{p3}(p) = \frac{K}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где  $K = K_1 K_2 K_3$ .

Эта разомкнутая система всегда устойчива, так как все три корня её характеристического уравнения – «левые». Фазовая частотная характеристика этой системы

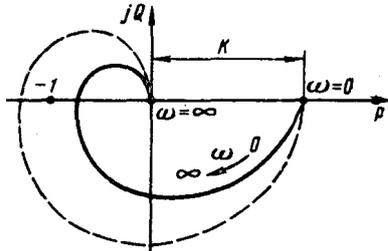


Рис. 8.11

$$\varphi_{p3}(\omega) = \sum_{i=1}^3 -\arctg \omega T_i.$$

Суммарный угол поворота АФК разомкнутой САР при изменении частоты от 0 до  $\infty$  составит  $\pi$ . Поэтому АФХ будет проходить через три квадранта (четвертый, третий и второй – рис. 8.11) и может в зависимости от величин  $K_i$  и  $T_i$  охватывать (штриховая линия) или не охватывать (сплошная) точку с координатами  $(-1, j0)$ . Обеспечить устойчивость такой системы в замкнутом состоянии всегда возможно, изменив соотношение между её параметрами. Амплитудно-

фазовую характеристику, подобную приведённой на рис. 8.11 могут иметь так же последовательно включенные аperiodическое и колебательное звенья.

При дальнейшем увеличении количества последовательно включенных аperiodических и колебательных звеньев повышается порядок системы и увеличивается количество квадрантов, через которые проходит АФХ.

Устойчивость таких систем в замкнутом состоянии можно обеспечить, изменяя соотношение их параметров. Выбрать соотношения между  $K_i$  и  $T_i$ , обеспечивающие устойчивость замкнутой системы, легче всего на основе алгебраического критерия устойчивости. Так как параметры  $K_i$  и  $T_i$  отдельных звеньев положительны, то устойчивость системы достигается, если выполняются ограничения на соотношения коэффициентов характеристического полинома знаменателя передаточной функции замкнутой системы  $F(p) + E(p)$ . Поэтому разомкнутые системы, состоящие из произвольного количества последовательно включенных аperiodических или колебательных звеньев, в замкнутом состоянии структурно-устойчивы, т. е. их устойчивость можно обеспечить без изменения структурной схемы соответствующим подбором параметров.

**Разомкнутая САР из одного интегрирующего и одного аperiodического звена 1-го порядка** имеет передаточную функцию:

$$W_{p4}(p) = \frac{1}{T_1 p} \frac{K_2}{1 + T_2 p} = \frac{K}{p(1 + T_2 p)},$$

где  $K = K_2 / T_1$ .

В разомкнутом состоянии САР нейтральна, так как полином знаменателя её передаточной функции имеет один нулевой корень ( $\nu = 1$ ).

Фазовая частотная характеристика разомкнутой САР:

$$\varphi_{p4}(\omega) = -0,5\pi - \arctg \omega T_2.$$

При  $\omega=0$   $\varphi_{p4}(\omega) = -0,5\pi$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  имеем  $\varphi_{p4}(\omega) \rightarrow -\pi$ , т. е. АФХ разомкнутой САР расположена в третьем квадранте. Амплитудная частотная характеристика разомкнутой САР

$$A_{p4}(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$   $A_{p4}(\omega) \rightarrow \infty$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $A_{p4}(\omega) \rightarrow 0$ , поэтому график АФХ имеет вид, показанный на рис. 8.12а.

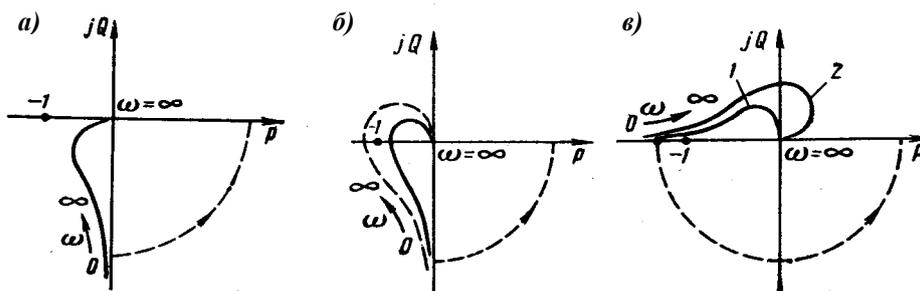


Рис. 8.12

Дополним этот годограф дугой бесконечно большого радиуса, проведённой против часовой стрелки к положительной вещественной полуоси на угол  $0,5\pi$ . В этом случае АФХ разомкнутой САР не

охватывает точку с координатами  $(-1, j0)$ , поэтому в замкнутом состоянии такая система устойчива.

**Разомкнутая САР из одного интегрирующего и двух аperiodических звеньев 1-го порядка** имеет передаточную функцию

$$W_{p5}(p) = \frac{1}{T_1 p} \frac{K_2}{1 + T_2 p} \frac{K_3}{1 + T_3 p} = \frac{K}{p(1 + T_2 p)(1 + T_3 p)},$$

где  $K = K_2 K_3 / T_1$ .

Полином  $F(p)$  этой системы имеет один нулевой корень ( $v = 1$ ); разомкнутая система нейтральна. Её ФЧХ

$$\varphi_{p5}(\omega) = -0,5\pi - \arctg \omega T_2 - \arctg \omega T_3.$$

При  $\omega = 0$   $\varphi_{p5}(\omega) = -0,5\pi$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  имеем  $\varphi_{p5}(\omega) \rightarrow -\frac{3}{2}\pi$ , т.е. АФХ расположена в третьем

и втором квадрантах.

Амплитудная частотная характеристика разомкнутой САР

$$A_{p5}(\omega) = \frac{K}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2}}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$   $A_{p5}(\omega) \rightarrow \infty$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $A_{p5}(\omega) \rightarrow 0$ ; поэтому график АФХ имеет вид, показанный на рис. 8.12б. Дополнив этот годограф дугой бесконечно большого радиуса, проведенной так же, как и на рис. 8.12а, можно сделать вывод, что рассматриваемая система в замкнутом состоянии может быть устойчивой (сплошная линия) или неустойчивой (штриховая) в зависимости от соотношений параметров звеньев  $T_1$ ,  $T_3$ ,  $T_2$ ,  $K_2$  и  $K_3$ . т.е. она структурно-устойчива.

Таким образом, к структурно-устойчивым относятся системы, состоящие из произвольного количества последовательно включенных аperiodических или колебательных звеньев, и системы, состоящие из одного интегрирующего и произвольного количества последовательно с ним включенных аperiodических или колебательных звеньев.

**Разомкнутая САР из двух интегрирующих и одного аperiodического звена 1-го порядка** имеет передаточную функцию

$$W_{p6}(p) = \frac{1}{T_1 p} \frac{1}{T_2 p} \frac{K_3}{1 + T_3 p} = \frac{K}{p^2 (1 + T_3 p)},$$

где  $K = K_3 / (T_1 T_2)$ .

Полином знаменателя  $F(p)$  этой САР имеет два нулевых корня ( $v = 2$ ), поэтому разомкнутая система является нейтральной. Её ФЧХ:

$$\varphi_{p6}(\omega) = -\pi - \arctg \omega T_3.$$

При  $\omega = 0$   $\varphi_{p6}(\omega) = -\pi$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$  имеем  $\varphi_{p6}(\omega) \rightarrow -\frac{3}{2}\pi$ , т.е. АФХ расположена во втором

квадранте.

Амплитудная частотная характеристика

$$A_{p6}(\omega) = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{1 + \omega^2 T_3^2}}.$$

При  $\omega \rightarrow 0$   $A_{p6}(\omega) \rightarrow \infty$ , а при  $\omega \rightarrow \infty$   $A_{p6}(\omega) \rightarrow 0$ ; график АФХ имеет вид, показанный на рис. 8.12в (кривая 1).

Дополним этот годограф дугой бесконечно большого радиуса, проведенной против часовой стрелки к положительной вещественной полуоси на угол  $v \frac{\pi}{2} = \pi$ . Амплитудно-фазовая характеристика с

дополнительной дугой охватывает точку с координатами  $(-1, j0)$ , поэтому в замкнутом состоянии такая система неустойчива. Если менять параметры системы  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $K_3$  годограф может изменять форму, но будет оставаться во втором квадранте. При увеличении количества последовательно включенных аperiodических (или колебательных) звеньев годограф будет проходить через большее количество квадрантов (например, кривая 2 на рис. 8.12в). Однако АФХ этих САР, дополненные дугой, по-прежнему будут охватывать точку с координатами  $(-1, j0)$  и все эти системы в замкнутом состоянии будут неустойчивы.

Добиться устойчивости таких САР изменением параметров нельзя, необходимо изменять их структурную схему, вводя в неё дополнительное корректирующее звено. Такие замкнутые системы,

состоящие из последовательно включенных двух интегрирующих и произвольного количества апериодических или колебательных звеньев, называют структурно-неустойчивыми.

Проектируя или исследуя САР, недостаточно определить, устойчива она или нет. Надо оценить запас устойчивости, т.е. удаленность системы от границы устойчивости. Устойчивая система, АФХ которой расположена очень близко от границы устойчивости, при практической реализации может оказаться неустойчивой вследствие неточностей в определении исходных параметров, погрешностей линеаризации, а также изменения параметров в процессе эксплуатации.

Применительно к алгебраическим критериям запас устойчивости будет выражаться тем, что соответствующие неравенства оказываются достаточно далекими от нарушения. Применительно к критерию устойчивости Михайлова – это удаление годографа  $\Gamma_M(j\infty)$  от мнимой оси. Наибольшее распространение получила оценка запаса устойчивости по критерию Найквиста. Условие того, что в замкнутом состоянии САР находится на границе устойчивости, определяется прохождением АФХ разомкнутой САР через точку с координатами  $(-1, j0)$ , как показано штриховой линией 1 на рис. 8.13а. Для устойчивых САР (линия 2) запас устойчивости характеризуется двумя величинами:

- запасом устойчивости по амплитуде;
- запасом устойчивости по фазе.

Запас устойчивости по амплитуде  $A_\pi$  – значение АЧХ разомкнутой системы, соответствующее частоте  $\omega_\pi$ , при которой  $\varphi(\omega_\pi) = -\pi$ . Запас устойчивости по амплитуде считают достаточным, если  $A_\pi \leq 0,5$ . Иногда его определяют величиной  $l = A_\pi^{-1} \geq 2$ . В логарифмических координатах (рис. 8.13б) запасу устойчивости по амплитуде соответствует величина  $b = 20 \lg A_\pi$  и  $|b| \geq 6$  дБ.

Запас устойчивости по фазе равен углу

$$\psi = |-\pi - \varphi(\omega_{cp})|,$$

где  $\omega_{cp}$  – частота среза.

При  $\omega = \omega_{cp}$  выполняется условие  $A(\omega_{cp}) = 1$  и годограф пересекает окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Обычно считают достаточным, чтобы  $\psi \geq 30^\circ$ .

Если АФХ системы пересекает отрицательную вещественную полуось несколько раз, необходимо,

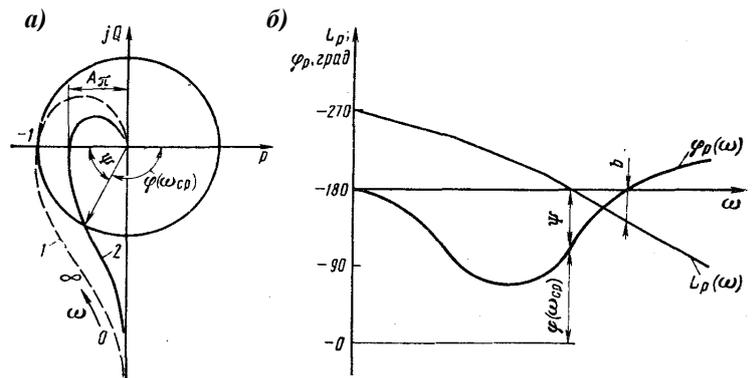


Рис. 8.13

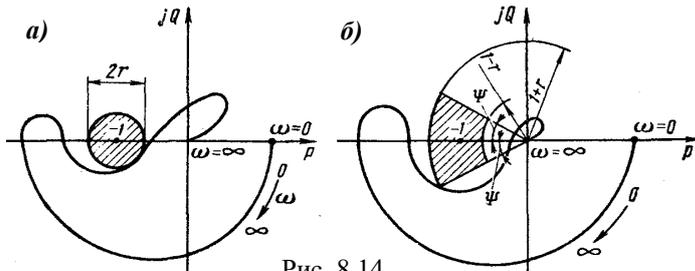


Рис. 8.14

чтобы годограф  $W_p(j\omega)$  не заходил в некоторую запретную область в виде окружности (рис. 8.14а) радиусом  $r=0,5$  с центром в точке, имеющей координаты  $(-1, j0)$ , или сектора (рис. 8.14б), образованного двумя лучами, выходящими из начала координат под углом  $\psi=30^\circ$  к отрицательной вещественной полуоси, и двумя дугами радиусами  $1-r=0,5$  и  $1+r=1,5$ . Если АФХ разомкнутой САР не пересекает запретную зону, то запас устойчивости системы по амплитуде не меньше  $l = r^{-1} = 2$ , а по фазе не меньше  $\psi = 30^\circ$ .

Параметры систем могут отклоняться от заданных как при проектировании, так и в процессе эксплуатации. Поэтому для структурно-устойчивых САР необходимо определять области устойчивости, т.е. совокупности параметров, при которых такие системы устойчивы. Границе областей устойчивости соответствует появление в решении характеристического уравнения мнимых корней. Подставив в характеристическое уравнение  $F(p) + E(p) = 0$  значение  $p = \pm j\omega$ , решают его относительно изменяемых параметров, фиксируя остальные. Если в системе только один варьируемый параметр  $D_i$  то область устойчивости имеет вид отрезков числовой оси (рис. 8.15а). При двух или более варьируемых параметрах область устойчивости изображается на плоскости (рис. 8.15б) или в пространстве.

Все совокупности параметров внутри области устойчивости соответствуют устойчивым САР, т.е. системам, имеющим только «левые» корни характеристических уравнений. На границе области появляются мнимые корни или нулевой корень. В качестве

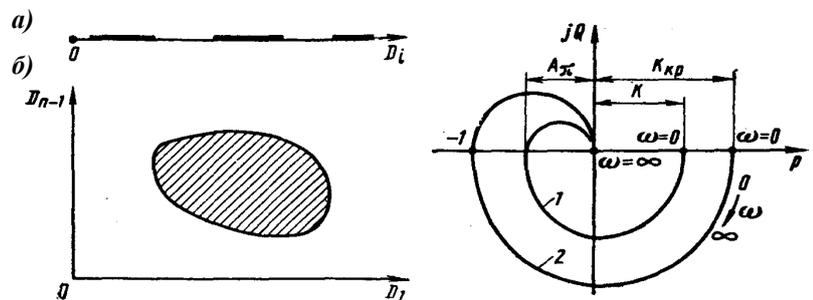


Рис. 8.15

варьируемого параметра можно принимать коэффициент усиления разомкнутой САР. При его изменении положение АФХ на комплексной плоскости меняется. Значение коэффициента усиления, при котором АФХ проходит через точку с координатами  $(-1, j0)$ , называют критическим  $K_{кр}$  для разомкнутой САР (рис. 8.15). Приблизительно можно определить

$$K_{кр} = K/A_{\pi}.$$

Для структурно-устойчивых систем величину  $K_{кр}$  можно найти в зависимости от постоянных времени и коэффициентов усиления от дельных звеньев на основе алгебраического критерия устойчивости. Если разомкнутая САР состоит из последовательно включенных аperiodических звеньев, то её передаточная функция определяется выражением

$$W_p(p) = \prod_{i=1}^k \frac{K_i}{1 + T_i p} = \frac{\prod_{i=1}^k K_i}{\prod_{i=1}^k (1 + T_i p)}.$$

Передаточная функция замкнутой САР

$$W_3(p) = \frac{\prod_{i=1}^k K_i}{\prod_{i=1}^k (1 + T_i p) + \prod_{i=1}^k K_i}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой САР

$$\prod_{i=1}^k (1 + T_i p) + \prod_{i=1}^k K_i = 0.$$

Считая  $\prod_{i=1}^k K_i = K_{кр}$  можно на основе выполнения ограничения на значения коэффициентов

характеристического уравнения найти связь между  $K_{кр}$  и постоянными времени  $T_i$ .

Устойчивость САР – необходимое, но недостаточное условие её технической пригодности. Устойчивая система при обработке различных воздействий может оказаться недостаточно точной с недопустимо медленно затухающими переходными процессами. Любая САР должна обладать еще достаточным качеством процессов регулирования, т. е. обеспечивать необходимую точность работы при установившихся и переходных режимах. Качество процессов регулирования оценивают критериями, значения которых определяют по графикам переходных процессов, вызванных задающими и возмущающими воздействиями. Для систем стабилизации регулируемой величины наиболее существенна реакция на переменную нагрузку, а для программных и следящих систем – возмущение в виде задающего воздействия.

При исследовании качества регулирования обычно используют нормированные (типовые) воздействия, имеющие детерминированный характер: единичный скачок, единичный импульс, гармонический сигнал, сигналы, изменяющиеся с постоянной скоростью или ускорением. Можно также использовать случайные возмущающие функции, оценивая качество регулирования по вероятностным характеристикам регулируемой величины. Рассмотрим лишь критерии, оценивающие качество регулирования при детерминированных типовых воздействиях.

**Ошибка в установившемся режиме** определяется как

$$\Delta_y = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t). \quad (8.5)$$

Её используют для оценки точности работы САР в установившемся режиме или когда возмущающие воздействия – плавные, медленно меняющиеся во времени функции.

Для нелинейных систем, в которых возможно появление автоколебаний, критерий (8.5) дополняют условием минимума амплитуды автоколебаний.

**Характер переходного процесса**

оценивают по виду переходной функции  $h(t)$ , которая может быть монотонной, аperiodической или колебательной (см. рис. 8.16). Для ЭПС наиболее благоприятны монотонные переходные процессы; другие процессы могут вызвать превышение током допустимых значений, срыв сцепления или срабатывание защиты.

**Время регулирования**  $t_p$  (время переходного процесса) – это время, в течение

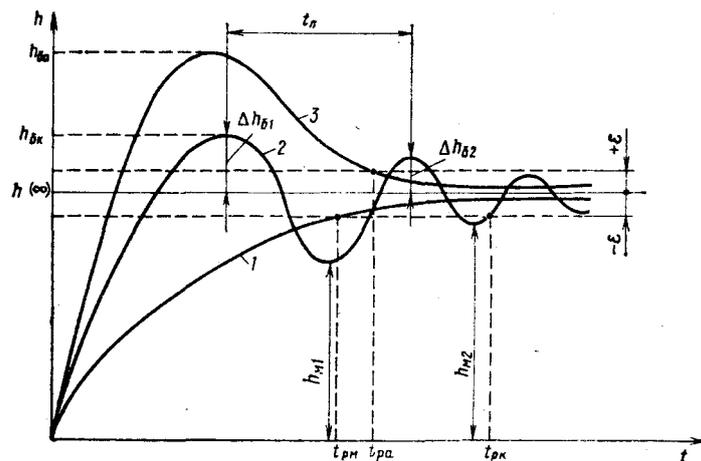


Рис. 8.16

которого, начиная с момента приложения воздействия  $l(t)$  к системе, отклонения переходной функции  $h(t)$  от ее установившегося значения  $h(\infty)$  будут меньше наперед заданной величины:  $|h(t) - h(\infty)|100 \leq \varepsilon$ . Обычно  $\varepsilon = 1 \dots 5\%$ . Время переходного процесса характеризует быстрдействие системы: чем оно меньше, тем выше быстрдействие.

Время регулирования для монотонного  $t_{рм}$ , колебательного  $t_{рк}$  и апериодического  $t_{ра}$  переходных процессов (рис. 8.16) определяется моментом, начиная с которого функция  $h(t)$  не выходит за пределы диапазона  $h(\infty) \pm \varepsilon = h(\infty)[1 \pm (0,01 \dots 0,05)]$ .

**Перерегулирование**  $\sigma$  – максимальное относительное отклонение переходной функции от установившегося значения, выраженное в процентах:

$$\sigma = \frac{h_0 - h(\infty)}{h(\infty)} 100.$$

Для монотонной переходной функции  $\sigma = 0$ . Величина перерегулирования связана с запасом устойчивости системы: чем меньше  $\sigma$ , тем дальше удалены характеристики системы от границы колебательной устойчивости. Запас устойчивости считают допустимым, если  $\sigma = 10 \dots 30\%$ .

**Крутизна переднего фронта переходной функции** оценивается значением производной  $dh(t)/dt$  в начале переходного процесса, т.е. при  $t \rightarrow 0$ . Этот показатель имеет важное значение в технических системах. Если в качестве выходной координаты рассматривают ток в силовой цепи, то  $di/dt$  определяет ЭДС самоиндукции, наводимой в обмотках электрических машин. В том случае, когда  $di/dt$  превышает допустимое значение, могут возникнуть перенапряжения, нарушающие работу тяговых машин.

**Колебательность переходного процесса** определяет характер его затухания и оценивается различными показателями, из которых наиболее простым является количество колебаний регулируемой величины за время регулирования  $t_p$ , определяемое, например, количеством минимумов кривой  $h(t)$  за время  $t_p$ . Так, на рис. 8.16 кривая 2 имеет два колебания. Приемлемым считают одно-два колебания. Однако бывают системы, в которых колебания не допускаются вообще или допускаются три колебания и более.

Другим показателем колебательности является быстрота затухания переходного процесса. Для монотонного и апериодического процессов быстрота затухания характеризуется абсолютным значением наименьшего вещественного корня характеристического уравнения  $\alpha_m$ . Для колебательного процесса быстроту затухания оценивают по логарифмическому декременту затухания

$$d = \ln \frac{\Delta h_{61}}{\Delta h_{62}}, \quad (8.6)$$

где  $\Delta h_{61}$  и  $\Delta h_{62}$  – два последовательных максимума кривой  $h(t)$  на рис. 8.16.

Предположим, что затухание колебательного процесса происходит по закону

$$\Delta h = Ae^{-\alpha t} \cos(\beta t + \varphi), \quad (8.7)$$

где  $\alpha$  – вещественная часть комплексного корня.

В этом случае первый экстремум  $\Delta h_{61}$  соответствует моменту  $t=0$ , т.е.  $\Delta h_{61} = A \cos \varphi$ . Вторым экстремум является через период  $t_{п} = 2\pi/\beta$

$$\Delta h_{62} = Ae^{-\alpha t_{п}} \cos(2\pi + \varphi) = Ae^{-\alpha t_{п}} \cos \varphi.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (8.6), получим

$$d = \ln \frac{A \cos \varphi}{Ae^{-\alpha t_{п}} \cos \varphi} = \alpha t_{п}. \quad (8.8)$$

Допустим, что уравнение (8.7) определяет свободную составляющую, соответствующую паре комплексных сопряженных корней характеристического уравнения  $p_1 = -\alpha + j\beta$  и  $p_2 = -\alpha - j\beta$ . Тогда выражение (8.8) можно записать в виде:

$$d \leq \frac{2\pi}{\mu},$$

где  $\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|$  – степень колебательности САР, определяемая таким корнем, для которого отношение  $\beta$  к

$\alpha$  – максимально.

Можно ввести еще один показатель – степень у с т о й ч и в о с т и, который определяется модулем вещественной части ближайшего к мнимой оси корня  $\eta = |\alpha_m|$ . Тогда длительность переходного процесса можно приблизительно оценить соотношением  $t_p \leq \frac{3}{\eta}$ .

Рассмотренные критерии качества процессов регулирования характеризуют точность работы САР в установившемся (первый критерий) и переходном (остальные критерии) режимах. Эти критерии можно определять непосредственно по виду переходного процесса.

Методы, основанные на расчетах переходного процесса в системе, называются прямыми методами анализа качества. К ним относят классический метод решения дифференциальных уравнений, операторный и частотный методы определения реакций системы, а также методы математического и физического моделирования. Прямые методы позволяют лишь оценить качество процессов регулирования при заданных воздействиях и параметрах системы, но не дают возможности для систем, имеющих порядок выше второго, установить непосредственную связь между их параметрами и показателями качества. Широкое распространение получили косвенные методы оценки качества процессов регулирования, которые позволяют оценить влияние структуры и параметров системы регулирования на показатели качества.

**Косвенные методы оценки качества регулирования** делятся на частотные, корневые и интегральные. Корневые и частотные методы не обеспечивают точной оценки всех показателей качества процессов регулирования, поэтому рассмотрим лишь интегральные методы, основанные на вычислении интегральных оценок качества.

Интегральные оценки качества позволяют по интегральным значениям некоторых функций ошибки  $\Delta$  выявлять суммарную ошибку за все время процесса регулирования, не решая дифференциальных уравнений. Наиболее распространены линейные и квадратичные интегральные оценки первого и второго рода:

$$I = \int_0^{\infty} \Delta dt. \quad (8.9)$$

и

$$I_2 = \int_0^{\infty} \Delta^2 dt.$$

(8.10)

В последнее время получила распространение улучшенная интегральная квадратичная оценка третьего рода:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left[ \Delta^2(t) + \tau^2 \left( \frac{d\Delta}{dt} \right)^2 \right] dt,$$

где  $\Delta(t) = h(\infty) - h(t)$  – отклонение регулируемой величины от нового установившегося значения;  $\tau$  – постоянная, имеющая размерность времени.

Значения этих интегралов позволяют приблизительно судить о качестве переходного процесса. Чем меньше площадь, заключенная между подынтегральной функцией и осью времени, тем меньше интегральная ошибка (рис. 8.17). Такие оценки характеризуют две важные стороны процесса регулирования: быстроту затухания и степень отклонения  $\Delta$  от установившегося значения  $h(\infty)$ .

Параметры системы выбирают так, чтобы обеспечить минимум соответствующей интегральной оценки. Если, например, требуется найти значения каких-либо двух параметров  $D_1$  и  $D_2$  системы для обеспечения минимума интегральной оценки, то эту оценку необходимо записать в виде функции варьируемых параметров и, взяв частные производные, приравнять их к нулю:

$$I = f(D_1, D_2); \quad \frac{\partial I(D_1, D_2)}{\partial D_1} = 0; \quad \frac{\partial I(D_1, D_2)}{\partial D_2} = 0.$$

Линейная интегральная оценка применима при монотонных переходных процессах. Если её применять к системам, имеющим колебательный переходный процесс, то при вычислении интеграла по формуле (8.9) площади, складываясь алгебраически, взаимно компенсируются (см. рис. 8.17б) и такая оценка теряет смысл.

Квадратичная интегральная оценка по уравнению (8.10), более совершенна, чем линейная. Её применяют при апериодических и колебательных процессах (рис. 8.18а). Вычисление её может быть

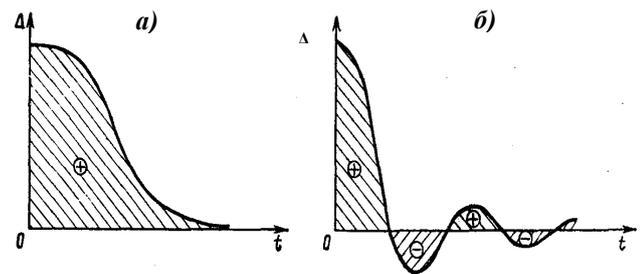


Рис. 8.17

выполнено различными способами: по коэффициентам однородного дифференциального уравнения относительно ошибки  $\Delta$  с учётом начальных значений координат (способ Л.И.Мандельштама), по частотным характеристикам (способ А.Б. Харкевича), по коэффициентам дифференциального уравнения системы автоматического регулирования (способ А. А. Красовского), а также по результатам вычислений на ЭВМ.

Однако и квадратичная оценка не всегда удачна. При такой оценке качество колебательного процесса может оказаться лучше, чем монотонного (рис. 8.18б). Это происходит из-за того, что квадратичная оценка не учитывает близости системы к колебательной границе устойчивости. Чтобы колебательность не выходила за установленные пределы, необходимо наложить ограничения не только на величину отклонения, но и на скорость отклонения, что учитывают в улучшенной интегральной оценке  $I_3$  предложенной А.А.Фельдбаумом. Минимум оценки  $I_3$  означает, что получен переходный процесс, близкий к экспоненте с постоянной  $\tau$ , и

$$\Delta(t) = \Delta_0 e^{-t/\tau}.$$

В этом случае идеальным графиком переходного процесса является не единичный скачок, а экспонента.

Для более полной оценки качества процессов регулирования следует использовать старшие квадратичные интегральные оценки более общего вида

$$I_h = \int \left\{ \Delta^2(t) + \tau_1^2 \left( \frac{d\Delta}{dt} \right)^2 + \tau_2^2 \left( \frac{d^2\Delta}{dt^2} \right)^2 + \dots + \tau_k^2 \left( \frac{d^k\Delta}{dt^k} \right)^2 \right\} dt.$$

Недостаток интегральных оценок заключается в отсутствии наглядного соответствия между значениями показателя  $I$  и показателями качества процессов регулирования. Кроме того, выражения, связывающие квадратичные интегральные оценки с параметрами САР, довольно сложны. В некоторых случаях интегральные оценки не имеют минимума и параметры САР приходится выбирать на основе зависимостей  $I(\sigma, t_p, \Delta_y, \dots)$ , получаемых при многократных расчетах процессов регулирования.

2 Систему автоматического регулирования называют нелинейной, если дифференциальное уравнение её движения содержит нелинейные зависимости или хотя бы один из ее элементов имеет нелинейную характеристику. Нелинейным может быть как элемент автоматического регулятора и, следовательно, сам регулятор, так и объект регулирования, например тяговый двигатель. Иногда нелинейные элементы специально вводят в систему регулирования для придания ей особых свойств, которые нельзя получить, применяя только линейные элементы. К таким свойствам относятся, в частности, способность системы работать в режиме устойчивых автоколебаний, например, при импульсном регулировании тяговых двигателей. Однако в ряде случаев нелинейность характеристики элемента необязательна для нормального функционирования системы и даже ухудшает качество процессов регулирования.

**Свойство нелинейности** присуще большинству реальных элементов. Несущественные нелинейности, соответствующие, например, линии б на рис. 8.19, не принимают во внимание, считая элементы с такими характеристиками практически линейными. Однако возможны нелинейности (кривая в), которые не только существенно влияют на характер изменения выходной величины в САР, но могут вызывать и принципиально новые режимы: автоколебания, резонанс и т.д. Такие нелинейности нельзя не учитывать. Рассмотрим нелинейности, наиболее свойственные системам автоматического управления ЭПС.

**Ограничение** это нелинейность, определяемая тем, что выходная величина элемента не может выйти за определённый предел  $y_6$  (рис. 8.20а). Такая

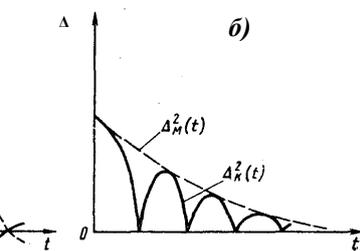


Рис. 8.18

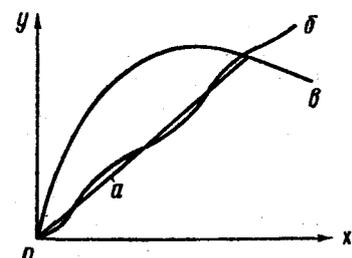


Рис. 8.19

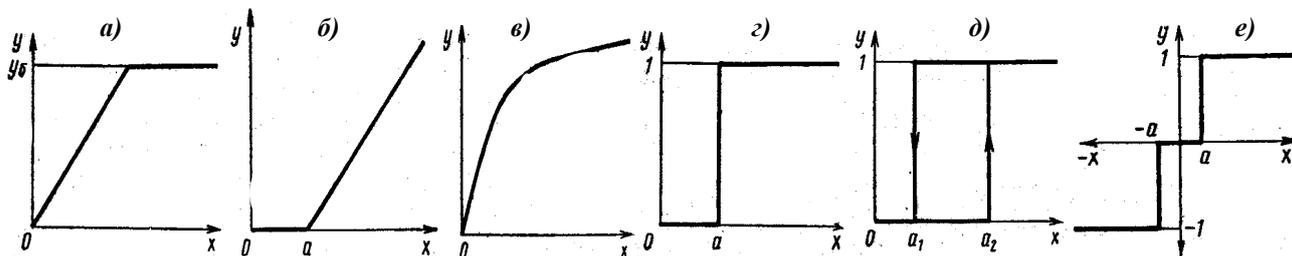


Рис. 8.20

нелинейность свойственна как ряду электромеханических элементов, имеющих механические ограничители перемещения исполнительных органов, так и многим полупроводниковым элементам, характеристики которых линейны лишь в определённом диапазоне изменения входной величины, а за его пределами выходная величина остается неизменной.

**Насыщение** (рис. 8.20б) как общий случай ограничения свойственно магнитным характеристикам и некоторым другим подобным зависимостям. Характеристике насыщения присущи отдельные практически линейные участки, соответствующие, например, ненасыщенному состоянию стальных магнитопроводов и их полному насыщению.

Линеаризация кривых на этих участках не вызовет больших погрешностей, но может приводить к ошибкам, недопустимым для инженерных расчётов в зоне, соответствующей «колену» кривой намагничивания. Магнитную характеристику часто аппроксимируют нелинейной зависимостью

$$c_e \Phi = i_w / (A_1 i_w + B_1)$$

или

$$c_e \Phi = A_2 \operatorname{ctg} B_2 i_w.$$

Подобным же образом аналитическая аппроксимация скоростной характеристики может быть представлена в виде

$$n = (U_k - i r_d)(A_3 + B_3 / i),$$

где  $U_k$  – напряжение на зажимах двигателя;  $r_d$  – сопротивление его обмоток;  $A_i, B_i$ , – постоянные аппроксимации.

**Нечувствительность** (рис. 8.20в) присуща некоторым полупроводниковым усилителям, причём иногда её вводят специально для улучшения динамических свойств системы, например, для уменьшения частоты или исключения автоколебаний. Аналитически характеристику с нечувствительностью описывают двумя линейными зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 & \text{при} & \quad x \leq a \\ y &= \kappa(x - a) & \text{при} & \quad x \geq a \end{aligned} \right\}$$

где  $a$  – зона нечувствительности.

**Релейная характеристика** свойственна элементам, которые при непрерывном изменении входной величины могут принимать лишь ограниченное количество состояний. Такой характеристикой обладает бесконтактное реле на базе транзисторных или магнитных усилителей, которое может принимать одно из двух состояний – включено или выключено. Эти состояния могут быть условно обозначены 0 или 1. У рассматриваемого двухпозиционного элемента включение и выключение происходят при одном и том же значении  $a$  входной величины, что соответствует коэффициенту возврата  $\kappa_v = 1$  и свойственно лишь электронным реле. Под коэффициентом возврата (рис 8.20д) понимают отношение входного сигнала  $a_1$ , соответствующего выключению (отпаданию якоря у электромагнитных реле) к сигналу  $a_2$ , соответствующему включению (троганию):  $\kappa_v = a_1 / a_2$ . Обычно  $\kappa_v < 1$  (см. рис. 8.20д). Величина  $a_2 - a_1$  носит название зоны нечувствительности реле.

Чаще всего зона нечувствительности нежелательна и её стараются по возможности устранить, приближая характеристики элемента к идеальной (см. рис. 8.20е). Значительно реже необходимо искусственно расширять *зону нечувствительности*.

Существуют, также трёхпозиционные элементы с тремя состояниями: 1, 0, –1.

Идеальная характеристика такого элемента представлена на рис. 8.20е. Характеристики всех рассмотренных релейных элементов могут быть смещены по осям  $x$  и  $y$ .

Характеристики нелинейных элементов весьма разнообразны. Их можно разделить на симметричные (см. рис. 8.20е) и несимметричные (см. рис. 8.20г, д), монотонные и немонотонные, непрерывные и дискретные, однозначные и неоднозначные.

Характеристику  $y(x)$  называют *монотонной*, если знак её производной не меняется во всей области допустимых изменений входной величины  $x$  (см., например, рис. 8.20а и б). Монотонными характеристиками обладают широтно-импульсные тиристорные преобразователи и управляемые выпрямители. Характеристика рис. 8.20в немонотонна, так как в точке экстремума  $x$  происходит перемена знака  $dy/dx$ .

*Непрерывными называют* характеристики, не имеющие скачков и разрывов, т. е. дифференцируемые во всей области возможных изменений входной величины. К дискретным относят характеристики элементов, не обладающих этим свойством.

**Тяговый двигатель как нелинейный объект регулирования.** При исследовании динамических процессов в системах с тяговыми двигателями в пределах больших отклонений методы линеаризации непригодны. К тому же магнитная характеристика  $\Phi(I_w)$  и зависящие от нее рабочие характеристики не имеют точного аналитического выражения. За основу нелинейной математической модели двигателя принимают легко дифференцируемые и интегрируемые функции, обеспечивающие достаточно точную аппроксимацию.

Входные координаты тягового двигателя – это напряжение  $u_k$  и коэффициент регулирования возбуждения  $\beta$ , а выходная – ток  $i$  (рис. 8.21). При моделировании можно принять зависимость

$$i = (u_k - c_e \Phi v) / r_d \quad (8.11)$$

Уравнение (8.11) – неявная функция тока  $i$ , так как магнитный поток  $\Phi$  зависит от  $i$  и  $\beta$ . Можно принять аппроксимирующую зависимость для  $c_e \Phi(i_v)$ :

$$c_e \Phi = A\beta i + B \quad (8.12)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  подбирают по магнитным или нагрузочным характеристикам двигателя. На аппроксимируемой характеристике берут две точки и подставляют их координаты в уравнение (8.12). Полученную систему двух линейных уравнений решают относительно  $A$  и  $B$ . Погрешность при определении величин  $A$  и  $B$  можно уменьшить, если использовать метод наименьших квадратов в сочетании с методом выравнивания.

Подставив выражение (8.12.6) в уравнение (8.11), получим

$$i = [u_k - (A\beta i + B)v] / r_d.$$

При пусковом регулировании до скорости  $v_c$  выхода на автоматическую характеристику поддерживают  $\beta=1$  и изменяют  $u_k$ . Далее, сохраняя постоянной величину  $u_k$ , изменяют  $\beta$  (ослабляют поле).

При исследовании процессов регулирования надо учитывать также нелинейность динамических характеристик, которые определяются зависимостью индуктивности двигателя от тока  $L(i)$ . Линеаризованную модель тягового двигателя при стабилизации скорости регулятором напряжения или тока возбуждения необходимо преобразовать в систему с нелинейными зависимостями. Составляя уравнения, можно использовать упрощенную схему замещения двигателя (рис. 8.21а) с эквивалентным контуром вихревых токов и контуром регулирования возбуждения.

Учёт вихревых токов с помощью условного контура не отличается высокой точностью, но для исследования процессов регулирования вполне приемлем, так как при этом рассматриваются сравнительно медленно протекающие процессы.

Зависимость тока якоря от напряжения при переходных процессах

$$i r_d + \frac{d\psi(i)}{dt} = u_k - c_e \Phi v,$$

где  $\psi(i) = iL(i)$  – потокосцепление в двигателе;  $r_d = r_{\text{я}} + r_{\text{дп}} + r_{\text{в}}\beta + r_{\text{ко}}$  – сопротивления якоря, добавочных полюсов, катушки возбуждения и компенсационной обмотки соответственно;  $L(i) = L_{\text{дп}} + L_{\text{тп}}(i) + L_{\text{я}}(i)$  – индуктивности катушек добавочных и главных полюсов и якорной обмотки соответственно. Влияние вихревых токов учтено шунтированием катушки главных полюсов условным резистором  $r_{\text{вих}}$ , величину сопротивления которого определяют экспериментально. Обычно  $r_{\text{вих}} \approx (2 \dots 4)r_{\text{в}}$ .

Уравнения контура вихревых токов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi(i_{\text{в1}})}{dt} - i_{\text{вих}} r_{\text{вих}} &= 0; \\ i_{\text{в1}} &= i_{\text{в}} - i_{\text{вих}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

С учетом  $\psi(i) = iL(i)$  уравнение (8.13) можно преобразовать к виду

$$\frac{di_{\text{в1}}}{dt} \left[ L_{\text{в}}(i_{\text{в1}}) + i_{\text{в1}} \frac{dL_{\text{в}}(i_{\text{в}})}{di_{\text{в1}}} \right] - i_{\text{вих}} r_{\text{вих}} = 0$$

Полагая, что ток  $i_{\text{в1}}$ , определяющий магнитный поток двигателя, связан с током возбуждения  $i_{\text{в}}$  зависимостью

$$i_{\text{в1}}(p) = W_d(p) i_{\text{в}}(p),$$

где  $W(p) = 1/(1 + T_d p)$ .

Постоянную времени  $T_d$  определяют экспериментально. Для тяговых двигателей, например, электровозов она равна 0,25...0,3 с, а электропоездов – 0,15...0,25 с. При этом  $i_{\text{в}} = i\beta$ . Зависимости  $F_{\text{к}}(i)$  и  $v(F)$  можно считать линейными:

$$\begin{aligned} F_{\text{к}}(p) &= W_2(p) i(p) \\ v(p) &= W_3'(p) F_{\text{к}}(p) - W_3''(p) W_i(p). \end{aligned}$$

и

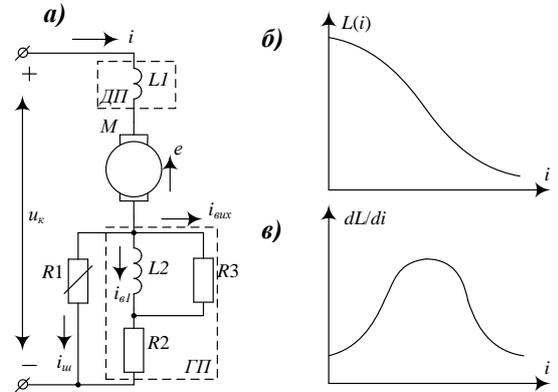


Рис. 8.21

Структурная схема тягового двигателя, приведенная на рис. 8.22, соответствует рассмотренным

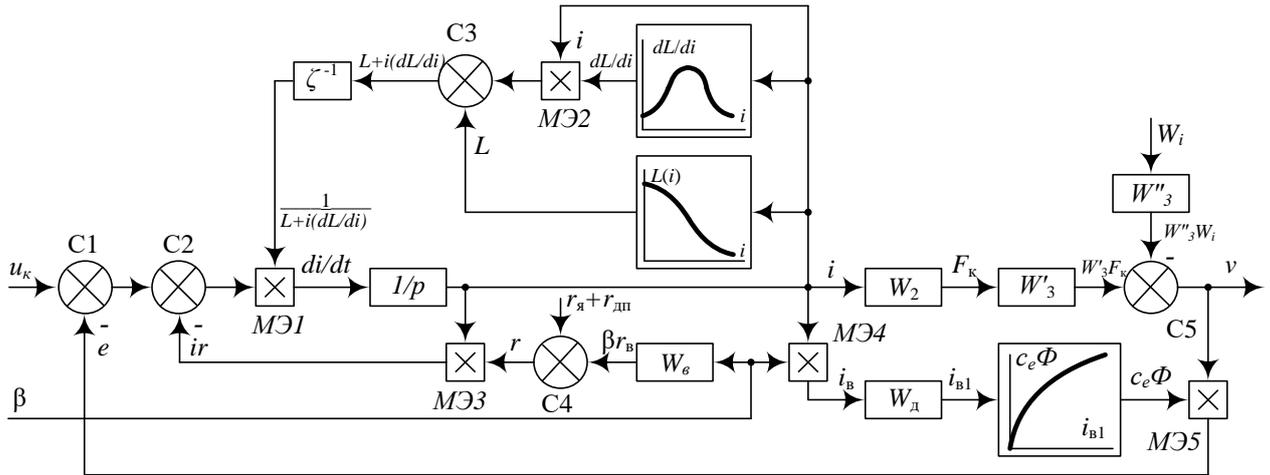


Рис. 8.22

уравнениям. В ней учтена статическая нелинейная зависимость  $\Phi(i)$  (см. рис. 7.2). В структурную схему введены сумматоры C1...C5, множительные элементы МЭ1...МЭ5 и элемент  $\zeta^{-1}$ , с помощью которого вычисляется функция  $x_2$ , обратная входной  $x_1$ :  $x_2 = x_1^{-1}$

Вихревые токи необходимо учитывать только при быстро протекающих переходных процессах. Если длительность процесса превышает 0,5...0,7 с, то действие вихревых токов на процессы в САР можно не учитывать, считая, что  $W(p) = 1$ . Рассмотренная нелинейная модель не единственно возможная. Е' можно использовать для детального расчёта окончательного варианта САР.

**Нелинейные системы автоматического регулирования ЭПС.** Линейные системы обычно не могут быть непосредственно использованы на ЭПС, так как интенсивность изменения регулируемой величины в них при ликвидации рассогласования примерно пропорциональна величине этого рассогласования. Это может привести к резким толчкам тока и, следовательно, силы тяги, что недопустимо. Поэтому интенсивность изменения управляющего воздействия ограничивают, используя обычно принцип постоянства изменения входной величины исполнительного элемента. Практически этого достигают, включая релейный элемент на выходе элемента сравнения. В состав САР вводят интегрирующее звено с передаточной функцией  $W_k(p) = \kappa/p$ , выходная величина которого, следовательно, может увеличиваться или уменьшаться с постоянной скоростью, не зависящей от величины рассогласования (рис. 8.23).

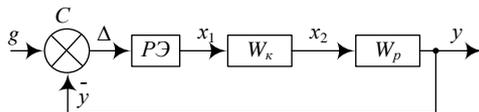


Рис. 8.23

Релейный элемент РЭ в простейшем случае имеет характеристику, приведенную на рис. 8.20г, хотя в ряде САР ЭПС для придания системе определенных свойств используют РЭ, имеющие зону нечувствительности (см. рис. 8.20д). Особенность применяемых интегрирующих звеньев (звено  $W_k$  на рис. 8.23) состоит в том, что их

статическая характеристика имеет ограничение (см. рис. 8.20а).

В качестве примера рассмотрим систему, предназначенную для стабилизации тока тяговых двигателей (рис. 8.24). В зависимости от знака сигнала рассогласования  $\Delta u$ , получающегося на выходе С, с постоянной скоростью уменьшается или увеличивается выходная величина  $x_2$  интегрирующего звена  $W_k$ . Величина  $x_2$  поступает на вход УЭ в вызывает пропорциональное изменение его выходной величины  $\tau$ ,  $f$  или  $\alpha$ , а следовательно, и изменение напряжения на выходе ИЭ.

Исследование процессов в такой САР сводится к анализу системы нелинейных дифференциальных уравнений, которые в предположении, что исполнительным элементом является тиристорно-импульсный преобразователь с принудительной коммутацией (электропоезд ЭР12), им вид:

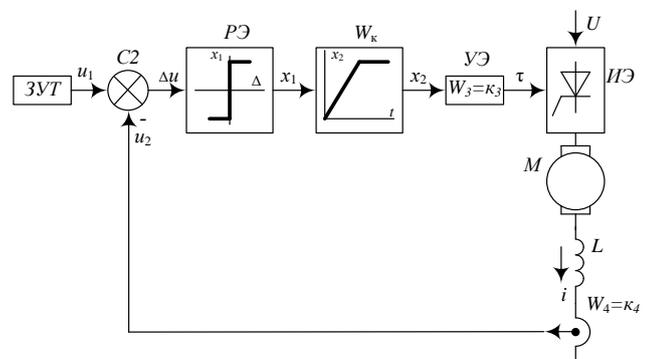


Рис. 8.24

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta u &= u_1(I_a) - u_2(i); \\
 x_1 &= 1 \operatorname{sign} \Delta u; \\
 x_2 &= \kappa_1 \int_0^t x_1 dt \quad \text{при } 0 \leq x_2 \leq x_{2\text{макс}}; \\
 \tau &= \kappa_2 x_2; \\
 u_k &= \kappa_3 \tau; \\
 L \left( \frac{di}{dt} + i \frac{dL}{di} \right) + ri &= u_k - c_e \Phi v; \\
 u_2 &= \kappa_4 i.
 \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Здесь  $\operatorname{sign}$  обозначена функция, принимающая два значения в зависимости от знака аргумента, т. е.  $x_1 = 1$  при  $\Delta u > 0$  и  $x_1 = -1$  при  $\Delta u < 0$ . Индуктивность  $L$  обмоток тягового двигателя нелинейно зависит от тока. Поэтому  $L \neq \text{const}$  и  $dL/di \neq \text{const}$ . Еще одна нелинейность обусловлена насыщением магнитной системы двигателя, и при решении системы уравнений следует иметь в виду нелинейную зависимость  $\Phi(i)$ .

**Методы исследования и расчета нелинейных систем.** Для исследования нелинейных систем разработан ряд специальных методов: частотно-амплитудный, метод фазовой плоскости, графоаналитический и ряд других. Применение каждого из них обычно ограничено какой-то узкой областью. Моделировать процессы регулирования в любых нелинейных системах позволяет применение вычислительной техники. Однако при моделировании можно получить данные переходного процесса только для системы с конкретными параметрами, а не в общем виде. Задачи анализа и синтеза приходится решать, задавая исходными параметрами системы, а затем корректировать их по полученным характеристикам переходного процесса.

Частотно-амплитудный метод предусматривает выделение в системе нелинейного элемента НЭ и объединение остальных в линейную часть ЛЧ (рис. 8.25). Например, так можно представить систему, подобную приведенной на рис. 8.24, если учитывать только нелинейность релейного элемента, а остальные считать линейными.

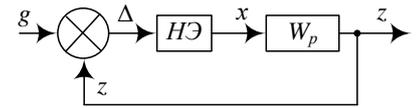


Рис. 8.25

При нескольких нелинейных элементах определяют их эквивалентную статическую характеристику.

Для параллельно соединенных элементов (рис. 8.26а) эквивалентная статическая характеристика (кривая  $y_3$  на рис. 8.26б) представляет собой сумму ординат их характеристик кривые  $y_1$  и  $y_2$ .

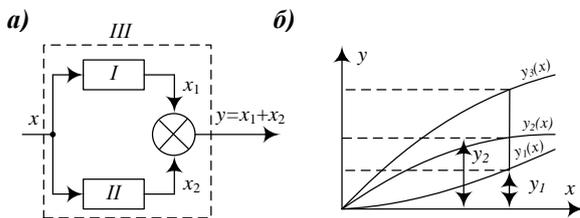


Рис. 8.26

При последовательном соединении звена I (рис. 8.27а), статическая характеристика которого  $f_1(x)$  располагается в квадранте I (рис. 8.27б), и звена II с характеристикой  $f_2(x)$ , расположенной в квадранте II, характеристика эквивалентного звена  $f_3(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$  находится в квадранте IV.

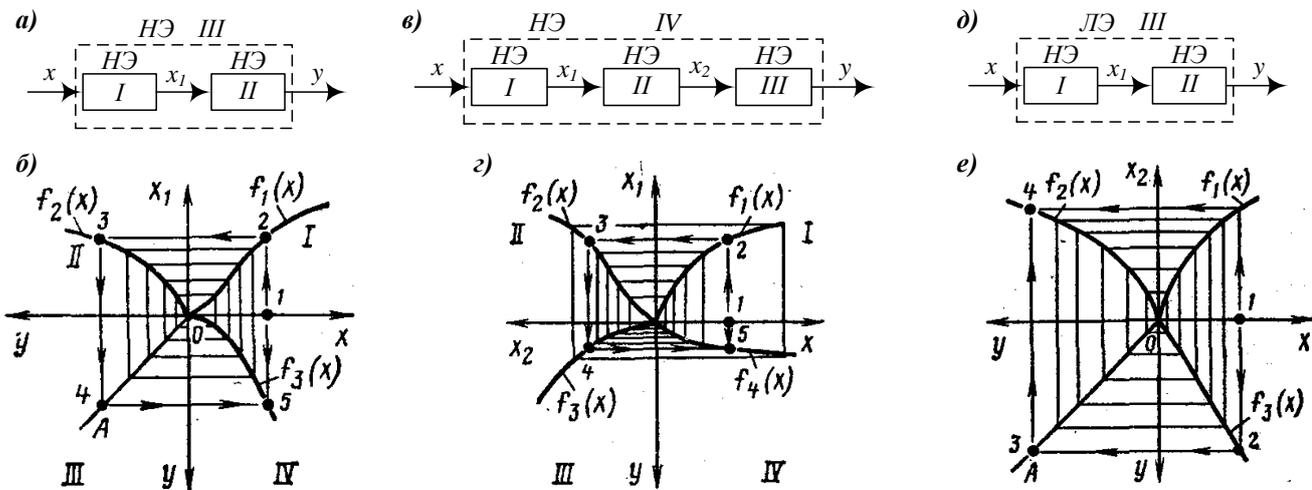


Рис. 8.27

Задаваясь каким-то значением  $x$ , например, для точки 1, из неё восстанавливают перпендикуляры в квадранты I и IV. Из точки 2 пересечения перпендикуляра с характеристикой  $f_1(x)$  проводят линию, параллельную оси абсцисс, до пересечения с характеристикой  $f_2(x)$  – точка 3. Абсцисса, соответствующая

точке 3, равна искомому значению выходной координаты. Это значение переносят в квадрант IV с помощью биссектрисы  $OA$  и перпендикуляров к осям  $y$  и  $x$  так, как показано стрелками. Полученная точка 5 принадлежит статической характеристике эквивалентного звена НЭ. Так же можно найти другие точки характеристики  $f_3(x)$ .

Для построения эквивалентной статической характеристики трёх последовательных звеньев (рис. 8.27e) в квадрантах I, II, III (рис. 8.27), располагают характеристики исходных звеньев, а в квадранте IV рассмотренным способом получают эквивалентную статическую характеристику. Если в системе более трёх звеньев, то их объединяют в группы по два-три звена, а затем по характеристикам групп определяют характеристику системы.

Таким же способом определяют характеристику одного из звеньев так, чтобы характеристика эквивалентного звена была линейной. Допустим, система состоит из двух звеньев (рис. 8.27d) и характеристика первого звена задана в первом квадранте (см. рис. 8.27e). В квадранте IV строят желаемую характеристику эквивалентного звена. Искомую характеристику второго звена можно построить в квадранте II, используя биссектрису  $OA$ . Так же задачу можно решать и при большем количестве звеньев.

Если звенья системы включены по схеме обратной связи (рис. 8.28a), то определение статической характеристики эквивалентного звена зависит от того, какая эта связь – положительная или отрицательная. Для отрицательной обратной связи

$$y=f(x-x_{oc})=f[x-\varphi(y)].$$

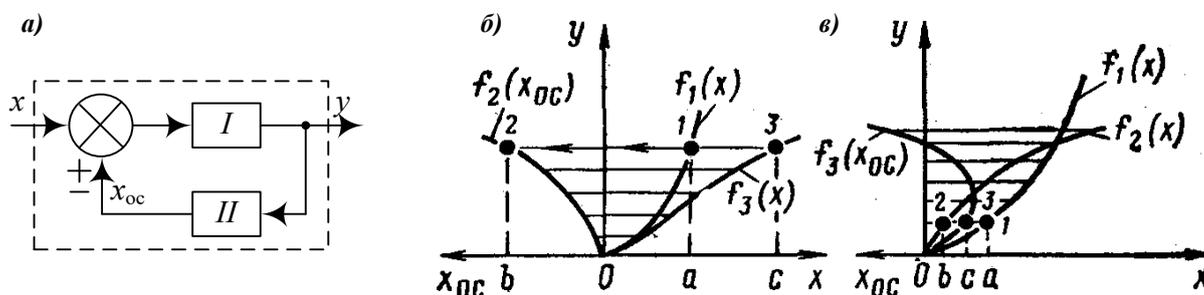


Рис. 8.28

При определении характеристики эквивалентного звена, характеристику звена в цепи прямой связи строят в квадранте I [ кривая  $f_1(x)$ , см. рис. 8.28б], а характеристику звена в цепи обратной связи – в квадранте II [кривая  $f_2(x_{oc})$ ]. Задаваясь каким-либо значением  $y$  (например, точка 1), определяют, каким должно быть значение, входной координаты  $x$  при отрицательной обратной связи. В системе без обратной связи  $x$  определяют по кривой 1:  $x$  равен отрезку  $0a$ ; при обратной связи  $0a = x - x_{oc}$ . Поэтому надо определить  $x_{oc}$ . Для заданного значения  $y$  искомое  $x = 0a + x_{oc}$ . На рис. 8.28б показано, что точке 1 кривой  $f_1(x)$  соответствует точка 2 на кривой  $f_2(x)$  и  $x_{oc} = 0b$ . Тогда искомое значение  $x = 0c = 0a + 0b$  и соответствует точке 3 статической характеристики  $f_3(x)$  эквивалентного звена. Такие же построения для других значений  $y$  определяют другие точки характеристики эквивалентного звена.

При положительной обратной связи  $x = x - x_{oc}$ . Характеристики звеньев, включённых в цепи прямой и обратной связи, строят в первом квадранте – кривые  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  (рис. 8.28e). Искомая абсцисса  $0c$  результирующей характеристики равна разности абсцисс точек 1 и 2:  $0c = 0a - 0b$ . При отрицательной обратной связи результирующая статическая характеристика более пологая, чем исходные, а при положительной – более крутая.

По рассмотренным правилам можно преобразовать нелинейную систему к виду рис. 8.25, что позволяет использовать для исследования системы частотно-амплитудный метод. Предполагают, что на систему воздействует гармоническое возмущение. В большинстве практических случаев при расчете САР ЭПС входная величина нелинейного элемента  $\Delta(t)$  также изменяется по гармоническому закону (рис. 8.29a)

$$\Delta(t) = A \sin \omega t.$$

Если принять статическую характеристику НЭ, соответствующую рис. 8.20d, то выходная величина  $x(t)$  несинусоидальна (рис. 8.29б), но её можно разложить в гармонический ряд

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_1 \sin n\omega t + A_2 \cos n\omega t),$$

где  $A_0$  – постоянная составляющая;  $n$  – порядковый номер гармоники.

При частотно-амплитудном методе исследования САР пренебрегают всеми гармониками, кроме первой, так что выходная величина НЭ

$$x^*(t) = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t.$$

Так как обычно в САР ЭПС  $A_0 = 0$ , то

$$x^*(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t,$$

$$\text{где } A_1 = (1/\pi) \int_0^{2\pi} x \sin \omega t d(\omega t); \quad A_2 = (1/\pi) \int_0^{2\pi} x \cos \omega t d(\omega t).$$

Сделанные предположения позволяют ввести передаточную функцию нелинейного звена, т. е. отношение комплексной амплитуды выходного гармонического сигнала  $A_1 + jA_2$  к амплитуде  $A$  входного сигнала

$$W_H(jA) = A_1/A + jA_2/A$$

Модуль передаточной функции нелинейного элемента

$$|W_H(jA)| = \sqrt{(A_1/A)^2 + (A_2/A)^2}$$

а её фаза

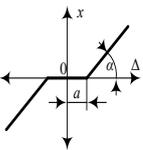
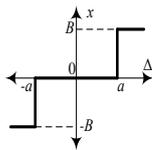
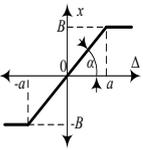
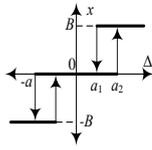
$$\varphi = \text{arctg}(A_2/A_1).$$

Для рис. 8.29 при характеристике НЭ, соответствующей рис. 8.20д,

$$|W_H(jA)| = 4B/(\pi A) \quad \text{и} \quad \varphi = 0.$$

Полученную таким образом передаточную функцию НЭ можно использовать при анализе и синтезе САР наряду с передаточными функциями остальных линейных звеньев. Погрешность этого метода заключается в том, что при переходе от  $x$  к  $x^*$  не приняты во внимание высшие гармоники. Если, как это обычно бывает в САР ЭПС, линейная часть системы не пропускает на выход высшие гармоники, то погрешности не превышают значений, допустимых для инженерных расчетов. При практическом применении этого метода используют табл. 8.1 передаточных функций типовых нелинейных элементов.

Таблица 8.1.

Характеристика НЭ	Выражение передаточной функции	Характеристика НЭ	Выражение передаточной функции
	$W_H(jA) = 1 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{\pi} - \frac{4\alpha \cos \alpha}{\pi A}$ $\alpha = \arcsin \frac{a}{A} \quad (A > a)$		$W_H(jA) = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}}$ $(A > a)$
	$W_H(jA) = \frac{4}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{\pi} + \frac{\alpha \cos \alpha}{A} \right]$ $\alpha = \arcsin \frac{a}{A} \quad (A > a)$		$W_H(jA) = \frac{2B}{\pi A} \left[ \sqrt{1 - \frac{a_2^2}{A^2}} + \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{A^2}} - j \frac{a_2 - a_1}{A} \right]$ $(A < a)$

**Метод фазовой плоскости** целесообразен для анализа процессов регулирования в нелинейных системах 1-го и 2-го порядков, в дифференциальные уравнения которых не входит время в явном виде. Процесс регулирования в таких системах можно наглядно представить в плоскости координат, где по оси ординат откладывают производную регулируемой величины, а по оси абсцисс – саму регулируемую величину. Сущность метода состоит в том, что характерные свойства регулируемого процесса оценивают по виду фазовых траекторий. Фазовой траекторией называют изображение процесса регулирования на фазовой плоскости. Для систем, имеющих порядок выше 2-го, фазовые траектории приходится изображать в пространстве или в проекциях на координатные плоскости, вследствие чего метод теряет наглядность.

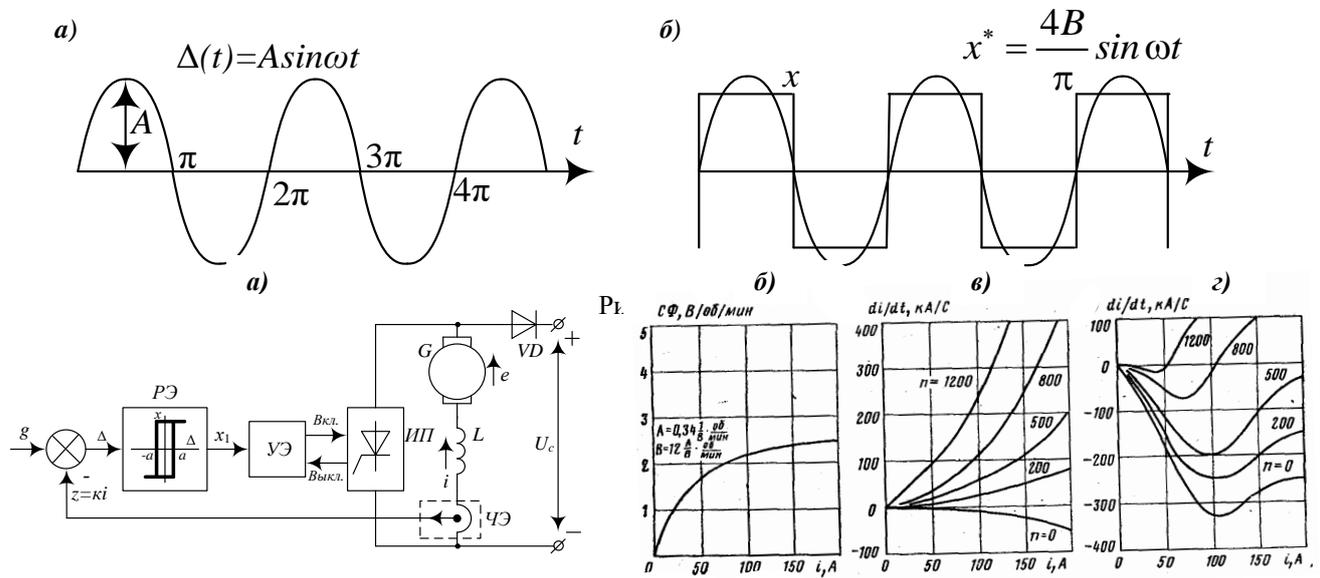


Рис. 8.30

В качестве примера рассмотрим применение метода фазовой плоскости к системе стабилизации тока в режиме рекуперативного торможения тягового двигателя последовательного возбуждения при использовании в качестве исполнительного элемента тиристорно-импульсного преобразователя ИП постоянного тока с принудительной коммутацией тиристорov (рис. 8.30а). Работа этой системы сводится к включению ИП при помощи релейного элемента РЭ и управляющего элемента УЭ, если  $g - ki > a$  и к выключению его, если  $g - ki < -a$ . Если  $|g - ki| < a$ , то состояние РЭ, УЭ и ИП не меняется. При включенном ИП двигатель оказывается замкнутым накоротко и в контуре короткого замыкания начинает нарастать ток. При выключенном преобразователе под действием ЭДС самоиндукции двигателя и его собственной ЭДС ток начнет протекать через диод VD в источник питания. Функции источника выполняет в данном случае система электроснабжения. При включенном ИП процесс нарастания тока описывается дифференциальным уравнением

$$\left( i \frac{dL}{di} + L \right) \frac{di}{dt} + ir_d = e, \quad (8.15)$$

где  $L, r_d$  – индуктивность и активное сопротивление цепи двигателя, причём индуктивность и её производная зависят от тока в соответствии с рис. 8.30б, в, е;  $e = c\Phi n$  – ЭДС двигателя, работающего в генераторном режиме (см. рис. 8.30а).

С учётом того, что магнитная характеристика двигателя может быть аппроксимирована гиперболической функцией, получим

$$e = iv / (Ai - B).$$

Это позволяет записать уравнение (8.15) в виде

$$\frac{di}{dt} = \frac{i}{L + \frac{dL}{di} i} \left( \frac{v}{Ai + B} - r_d \right). \quad (8.16)$$

По уравнению (8.16) построена и приведена на рис. 8.30в фазовая траектория для разных  $n$ . При построении учитывалось, что индуктивность  $L$  зависит от тока и её значения при различных токах следует принимать по графику рис. 8.30б. Рассматриваемая фазовая траектория показывает, как будет меняться ток  $i$  и его производная  $di/dt$  в двигателе, замкнутом накоротко преобразователем ИП.

Фазовая траектория при выключенном преобразователе ИП соответствует дифференциальному уравнению

$$\frac{di}{dt} = \frac{i}{L + \frac{dL}{di} i} [e - U_c - i(r_d + r_{ИП})], \quad (8.17)$$

где  $r_{ИП}$  – внутреннее сопротивление источника;  $U_c$  – его ЭДС.

Пользуясь выражением для  $e$ , преобразуем уравнение (8.17) к виду

$$\frac{di}{dt} = \frac{i}{L + \frac{dL}{di} i} \left[ \frac{v}{Ai + B} - \frac{U_c}{i} - (r_d + r_{ИП}) \right].$$

Фазовые траектории по последнему уравнению построены для разных  $n$  на рис. 8.30г.

Функции УЭ сводятся к включению и выключению ИП, т. е. к переключению системы с одной фазовой траектории на другую. Эти переключения происходят при  $i = I_3 \pm a$  (рис. 8.31а) для  $v = 20$  км/ч.

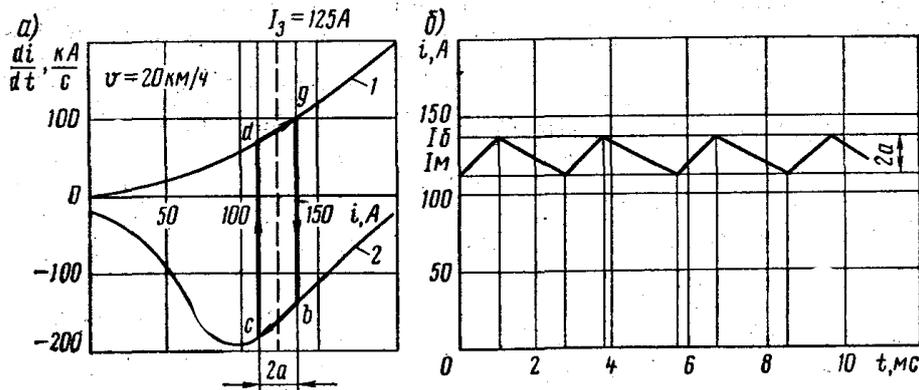


Рис. 8.31

Следовательно, процесс регулирования тока тягового двигателя при заданных  $I_3$ ,  $n$  и  $a$  изображается на фазовой плоскости неправильным четырёхугольником, что соответствует наличию устойчивых автоколебаний, когда ток двигателя изменяется в пределах от  $I_3 + a$  до  $I_3 - a$ . Параметры регулируемого процесса могут быть определены

по геометрическим размерам этого четырёхугольника. В частности, период автоколебаний (рис. 8.31б)

$$T = t_{dg} + t_{bc},$$

где  $t_{dg}$ ,  $t_{bc}$  – время перемещения точки по фазовой траектории на фазовой плоскости соответственно от  $d$  к  $g$  и от  $b$  к  $c$ :

$$t_{dg} \cong \frac{i_g - i_d}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{dg}} = \frac{2a}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{dg}}; \quad t_{bc} \cong \frac{i_b - i_c}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{bc}} = \frac{2a}{\left(\frac{di}{dt}\right)_{bc}}.$$

В числитель двух последних зависимостей входит ширина четырёхугольника, т.е. амплитуда колебаний тока, а в знаменатель – ордината середины соответствующей стороны. Из этих выражений видно, что период автоколебаний примерно пропорционален параметру  $a$  релейного элемента. Так, для рис. 8.31а  $t_{dg} = 50 \text{ A} : 85 \text{ кА/с} = 0,59 \text{ мс}$ ;  $t_{bc} = 50 \text{ A} : 60 \text{ кА/с} = 0,83 \text{ мс}$ ;  $T = 0,59 + 0,83 \text{ мс} = 1,42 \text{ мс}$ , что соответствует частоте автоколебаний  $f = 700$  Гц.

Анализируя процесс регулирования на фазовой плоскости, надо иметь в виду, что точка фазовой траектории для рассматриваемого момента времени в области  $\frac{di}{dt} > 0$  перемещается вправо, а в области

$$\frac{di}{dt} < 0 \text{ – влево.}$$

При устойчивых автоколебаниях (см. рис. 8.19б) ток двигателя изменяется в пределах, определенных зоной нечувствительности  $2a$  релейного элемента. Когда процесс регулирования становится неустойчивым (рис. 8.32), ток двигателя непрерывно нарастает, несмотря на то, что импульсный прерыватель ИП выключен. Признак неустойчивости регулируемого процесса на фазовой плоскости заключается в том, что фазовая траектория при выключенном состоянии ИП находится в области значений

$$\frac{di}{dt} > 0.$$

Для обеспечения устойчивости в этом случае нужно ввести дополнительное активное сопротивление в цепь двигателя или в цепь его питания; оно должно быть таким, чтобы при заданном значении тока было  $\frac{di}{dt} < 0$ . Устойчивость можно также обеспечить, ослабляя возбуждение двигателя.

Метод фазовой плоскости можно успешно использовать не только для анализа нелинейных систем, но и при их синтезе (расчете корректирующих звеньев).

**Моделирование процессов в системах автоматического регулирования ЭПС** можно осуществить с помощью цифровых и аналоговых вычислительных машин. Применяя цифровые машины, выполняют следующие действия:

- составляют систему дифференциальных уравнений, которая описывает процессы в исследуемой системе регулирования;
- составляют программу решения системы дифференциальных уравнений численным методом или же используют для этих целей готовую стандартную программу;
- выполняют расчёт процесса регулирования на вычислительной машине, получая при этом зависимость исследуемых параметров (ток, напряжение, скорость и т. д.) в функции времени.

Исключая промежуточные переменные, исходную систему уравнений (8.14) можно свести к нелинейному интегро-дифференциальному уравнению

$$\left(i \frac{dL}{di} + L\right) \frac{di}{dt} + ir_{\text{д}} = \kappa_1 \int_0^i \text{sign}(g - \kappa i) dt - iv / (Ai + B),$$

где  $L$  – также функция тока  $i$ .

Это уравнение дифференцированием по времени можно преобразовать к дифференциальному уравнению 2-го порядка стандартного вида

$$\left(i \frac{dL}{di} + L\right) \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{di}{dt}\right)^2 \frac{dL}{di} + ir_{\text{д}} = \kappa_1 \text{sign}(g - \kappa i) - \frac{Bv}{(Ai + B)^2}.$$

Полагая  $y = di/dt$ , получаем систему из двух дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{L + i \frac{dL}{di}}{\kappa_1 \text{sign}(g - \kappa i) - \frac{Bv}{(Ai + B)^2} - r_{\text{д}} y - y^2 \frac{dL}{di}} \end{cases}$$

Ее можно решать по стандартной программе при заданных начальных условиях. При этом нелинейные функции  $L$ ,  $dL/di$  следует заменять аппроксимирующими полиномами. Начальные условия в

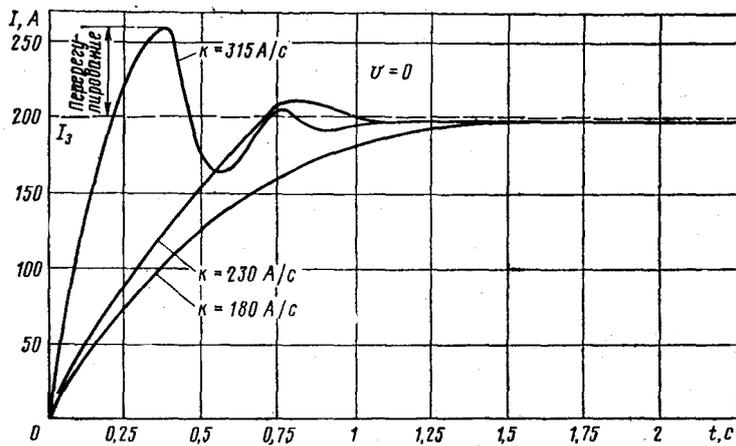


Рис. 8.32

рассматриваемых уравнениях зависят от исследуемого режима. Например, при рассмотрении процесса начального включения, когда машинист установит рукоятку задающего контроллера в положение, соответствующее наибольшему значению  $g_6 = \kappa I$ , имеем  $i_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ .

Расчет позволяет построить зависимость  $i(t)$  и по ней определить основные показатели исследуемого процесса: перерегулирование, время регулирования и др. (рис. 8.32).

Моделирование процессов регулирования на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) осуществляют, решая соответствующие

системы дифференциальных уравнений. При этом не нужно приводить исходную систему уравнений к нормальной форме. Выполняя повторные решения для разных параметров регулятора, можно выбрать их наилучшие значения.